doi:10.6043/j.issn.0438-0479.201608007

循环张量的一种逆

许晓玲[1],王　滕[2*]

(1.闽江学院数学系,福建 福州 350108;2.厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005)

摘要: 根据一种张量乘积、循环张量以及张量左右逆的基本定义和性质,给出可求逆的循环张量应该具有的结构特点以及相应逆的性质.通过一些例子给出了详细的求解循环张量逆的过程.

关键词: 循环张量;张量逆;张量

中图分类号: O 24　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 0438-0479(2017)04-0546-05

1　预备知识

矩阵的逆在矩阵理论和计算中都有着重要的作用[1-3].尽管张量是矩阵的一种延伸,但对于张量的逆,至今没有一个非常理想的定义.在参考文献[4]中,给出了一种张量逆的定义,而在文献[2]中,给出了循环张量的定义.本文中,将依据这种张量逆和循环张量的定义,求解循环张量的逆,同时给出相应逆的性质(主要是结构特点).

本文中考虑的张量都是复数域 $\mathbf{C}$ 的,张量的表达形式和一些相关记号都来自文献[4].

定义 1[4]　令 $\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_2}$ 和 $\mathcal{B}\in\mathbf{C}^{n_2\times n_3\times\cdots\times n_{k+1}}$ 分别是阶数 $m\geqslant 2$ 和 $k\geqslant 1$ 的张量,那么它们的乘积 $\mathcal{AB}$ 是一个阶数为 $(m-1)(k-1)+1$ 的张量 $\boldsymbol{C}$,它的元素按下式定义:

$$c_{i\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{m-1}}=\sum_{i_1,i_2\cdots,i_{m-1}\in[n_2]}a_{ii_1i_2\cdots i_{m-1}}b_{i_1\alpha_1}b_{i_2\alpha_2}\cdots b_{i_{m-1}\alpha_{m-1}}. \tag{1}$$

这里 $i\in[n_1]$, $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_{m-1}\in[n_3]\times[n_4]\cdots\times[n_{k+1}]$.

在上述定义中,如果 $n_1=n_2=\cdots=n_{k+1}=n$,那么 $\mathcal{AB}$ 与文献[6-7]中所介绍的张量乘积一致.定义 1 的张量乘积有如下的一些性质[4]:

1) $(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2)\mathcal{B}=\mathcal{A}_1\mathcal{B}+\mathcal{A}_2\mathcal{B}$,这里 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_2}$, $\mathcal{B}\in\mathbf{C}^{n_2\times n_3\times\cdots\times n_{k+1}}$.

2) $\mathbf{A}(\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2)=\mathcal{AB}_1+\mathcal{AB}_2$,这里 $\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2}$, $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\in\mathbf{C}^{n_2\times n_3\times\cdots\times n_{k+1}}$.

3) $\mathcal{A}\boldsymbol{I}_{n_2}=\mathcal{A}$, $\boldsymbol{I}_{n_2}\mathcal{B}=\mathcal{B}$,这里 $\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_2}$, $\mathcal{B}\in\mathbf{C}^{n_2\times n_3\times\cdots\times n_{k+1}}$, $\boldsymbol{I}_{n_2}$ 是维数为 n_2 的单位矩阵.

4) $\mathcal{A}(\mathcal{BC})=(\mathcal{AB})\mathcal{C}$,这里 $\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_2}$, $\mathcal{B}\in\mathbf{C}^{n_2\times n_3\times\cdots\times n_3}$, $\mathcal{C}\in\mathbf{C}^{n_3\times n_4\times\cdots\times n_r}$.

如果一个 m 阶 n 维的张量 $\mathcal{I}=(\delta_{i_1i_2\cdots i_m})$ 满足 $\delta_{i_1i_2\cdots i_m}=1$,当 $i_1=i_2=\cdots=i_m$,而其他元素均为 0,则称这样的张量为单位张量.

定义 2[4]　令 $\mathcal{A}$ 是 m 阶 n 维的张量,$\mathcal{B}$ 是 k 阶 n 维的张量.如果 $\mathcal{AB}=\mathcal{I}$,那么 $\mathcal{A}$ 称作 $\mathcal{B}$ 的左逆 m 阶张量,$\mathcal{B}$ 称作 $\mathcal{A}$ 的右逆 k 阶张量.

一组向量 $\boldsymbol{a}_1\in\mathbf{C}^{n_1}$, $\boldsymbol{a}_2\in\mathbf{C}^{n_2}\cdots$, $\boldsymbol{a}_k\in\mathbf{C}^{n_k}$ 的 Segre 外积,记作 $\boldsymbol{a}_1\otimes\boldsymbol{a}_2\cdots\otimes\boldsymbol{a}_k$,其实是一个 k 阶张量 $\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2\cdots\times n_k}$,其中的元素满足 $a_{i_1\cdots i_k}=(\boldsymbol{a}_1)_{i_1}(\boldsymbol{a}_2)_{i_2}\cdots(\boldsymbol{a}_k)_{i_k}$.一个张量 $\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{n_1\times n_2\cdots\times n_k}$ 称为是秩 1 的,如果存在非零向量 $\boldsymbol{a}_i\in\mathbf{C}^{n_i}$ $(i=1,2,\cdots,k)$,使得 $\mathcal{A}=\boldsymbol{a}_1\otimes\boldsymbol{a}_2\cdots\otimes\boldsymbol{a}_k$ 成立.

在文献[5]中,Chen 等给出了如下的循环张量定义.

定义 3[5]　令 $\mathcal{A}=(a_{j_1j_2\cdots j_m})$ 是 m 阶 n 维张量.如果对任意 $j_l,k_l\in[n]$, $k_l=j_l\bmod(n)+1$, $l\in[m]$,满足

$$a_{j_1j_2\cdots j_m}=a_{k_1k_2\cdots k_m}, \tag{2}$$

那么称 $\mathcal{A}$ 是 m 阶 n 维循环张量.

下面将 m 阶 n 维张量的集合记作 $T_{m,n}$, m 阶 n 维循环张量的集合记作 $C_{m,n}$.

收稿日期: 2016-08-19　**录用日期:** 2017-04-04
* **通信作者:** spring0920@163.com
引文格式: 许晓玲,王滕.循环张量的一种逆[J].厦门大学学报(自然科学版),2017,56(4):546-550.
Citation: XU X L, WANG T.The inverse of loop tensors[J].J Xiamen Univ Nat Sci,2017,56(4):546-550.(in Chinese)

对于循环矩阵而言，第一个行向量可以生成得到其他的行向量.同样的，循环张量也有类似的特点.本文中先介绍一个概念——行张量，对于张量 $\mathcal{A}=(a_{j_1j_2\cdots j_m})\in T_{m,n}$，令 $\mathcal{A}_k=(a^{(k)}_{j_1j_2\cdots j_{m-1}})\in T_{m-1,n}$ 中的元素满足 $a^{(k)}_{j_1j_2\cdots j_{m-1}}\equiv a_{kj_1j_2\cdots j_{m-1}}$，称 $\mathcal{A}_k$ 为张量 $\mathcal{A}$ 的第 k 个行张量.若 $\mathcal{A}$ 是循环张量，则不难发现行张量 $\mathcal{A}_k$，$k=2,3,\cdots,n$ 可以由第一个行张量 $\mathcal{A}_1=(\alpha_{j_1j_2\cdots j_{m-1}})$ 得到，这里 $\alpha_{j_1j_2\cdots j_{m-1}}\equiv a^{(1)}_{j_1j_2\cdots j_{m-1}}$.本文中称 $\mathcal{A}_1$ 为循环张量 $\mathcal{A}$ 的根张量.

现在记 $\boldsymbol{P}=(p_{jk})\in T_{2,n}$ 为置换矩阵，且满足 $p_{jj+1}=1$ 当 $j\in[n-1]$，$p_{n1}=1$，其他元素为 0.即

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&0&0&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&1\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}.\tag{3}$$

那么，根据循环张量的定义 3，可以得到以下的一些性质.

引理 1[4]　假设 $\mathcal{A}\in C_{m,n}$ 以及矩阵 $\boldsymbol{P}$ 定义为式(3)，那么对于任意的 $k\in[n]$，有

$$\mathcal{A}_{k+1}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_k\boldsymbol{P},\tag{4}$$

这里

$$\mathcal{A}_{n+1}=\mathcal{A}_1.$$

引理 2[4]　假设 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$ 以及矩阵 $\boldsymbol{P}$ 定义为式(3)，那么下面 3 种情况是等价的：

a) $\mathcal{A}\in C_{m,n}$.

b) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}\boldsymbol{P}=\mathcal{A}$.

c) 对任意的循环矩阵 $\boldsymbol{C}\in C_{2,n}$，有 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}\boldsymbol{C}\in C_{m,n}$.

2　循环张量的逆

2.1　循环矩阵的左右逆张量

如果一个循环矩阵是非奇异的，那么它的逆矩阵也同样是循环矩阵.由定义 2 可知，循环矩阵不仅有阶数为 2 的左右逆张量，还拥有阶数更高的左右逆张量.它们的结构如何？是否也是循环张量？接下来本文中会通过理论证明和实验数据来详细说明.

定理 1　(循环矩阵的右逆张量)设 $\boldsymbol{A}\in C_{2,n}$ 是非奇异的，那么存在唯一的循环张量 $\mathcal{B}\in T_{m,n}$，使得 $\boldsymbol{A}\mathcal{B}=\mathcal{I}\in T_{m,n}$.

证明　存在唯一性：

通过张量乘积的性质，可得：

$$\boldsymbol{A}\mathcal{B}=\mathcal{I},$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\mathcal{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\mathcal{I},$$

$$\boldsymbol{I}\mathcal{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\mathcal{I},$$

$$\mathcal{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\mathcal{I}.\tag{5}$$

设 $\boldsymbol{A}^{-1}=(a_{ij})$，由式(1)，可以计算出 $\mathcal{B}$ 中的元素：

$$\mathcal{B}_{ii_1i_2\cdots i_{m-1}}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}i_{ji_1i_2\cdots i_{m-1}}=\begin{cases}a_{il}, & i_1=i_2\cdots=i_{m-1}=l\in[n],\\0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{6}$$

循环结构：

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\mathcal{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\mathcal{I}\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\mathcal{I}\boldsymbol{P})=\boldsymbol{A}^{-1}\mathcal{I}=\mathcal{B}.\tag{7}$$

这里矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的定义为式(3).

从式(5)可见右逆张量中所有的行张量都是对角的.

例 1　设 $\boldsymbol{A}\in C_{2,3}$，它的根张量是 (1,2,3).求张量 $\mathcal{B}\in T_{3,3}$，使得

$$\boldsymbol{A}\mathcal{B}=\mathcal{I}\in T_{3,3}.$$

求解：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-5/18&7/18&1/18\\1/18&-5/18&7/18\\7/18&1/18&-5/18\end{pmatrix}.$$

根据式(5)，容易计算出张量 $\mathcal{B}$：

$$\mathcal{B}_1=\begin{pmatrix}-5/18&0&0\\0&7/18&0\\0&0&1/18\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_2=\begin{pmatrix}1/18&0&0\\0&-5/18&0\\0&0&7/18\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_3=\begin{pmatrix}7/18&0&0\\0&1/18&0\\0&0&-5/18\end{pmatrix}.\tag{8}$$

容易验证，张量 $\mathcal{B}$ 是循环张量，且每个行张量都是对角的.

定理 2　(循环矩阵的左逆张量)令 $\boldsymbol{A}\in C_{2,n}$ 是非奇异的，那么存在唯一的循环张量 $\mathcal{B}\in T_{m,n}$，使得 $\mathcal{B}\boldsymbol{A}=\mathcal{I}\in T_{m,n}$.

证明　存在唯一性：

通过张量乘积的性质，可得：

$$\mathcal{B}\boldsymbol{A}=\mathcal{I},$$

$$\mathcal{B}AA^{-1} = \mathcal{I}A^{-1},$$
$$\mathcal{B}I = \mathcal{I}A^{-1},$$
$$\mathcal{B} = \mathcal{I}A^{-1}. \tag{9}$$

循环结构：

$$P^{\mathrm{T}}\mathcal{B}P = P^{\mathrm{T}}\mathcal{I}A^{-1}P = (P^{\mathrm{T}}\mathcal{I}P)(P^{\mathrm{T}}A^{-1}P) = \mathcal{I}A^{-1} = \mathcal{B}. \tag{10}$$

这里矩阵 P 定义为式(3).

因此,只需要得到循环张量 $\mathcal{B}$ 的根张量 $\mathcal{B}_1$ 即可,设 $A^{-1}=(a_{ij})$.

$$\mathcal{B}_1 = A^{-\mathrm{T}}\ \mathcal{I}_1 A^{-1} = \underbrace{a_1 \otimes \cdots \otimes a_1}_{m-1}, \tag{11}$$

这里

$$\mathcal{I}_1 = (\delta_{i_1 i_2 \cdots i_{m-1}}) \in T_{m-1,n}$$

满足

$$\delta_{i_1 i_2 \cdots i_{m-1}} = \begin{cases} 1, & i_1 = i_2 \cdots = i_{m-1} = 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

而

$$a_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})^{\mathrm{T}}.$$

由上面的证明可见,左逆张量所有的行张量都是秩 1 的.

例 2 设 $A \in C_{2,3}$,它的根张量是 $(1,2,3)$,求张量 $\mathcal{B} \in T_{3,3}$,使得 $\mathcal{B}A = \mathcal{I} \in T_{3,3}$.

求解：

$$\mathcal{B}_1 = a_1 \otimes a_1 = (-5/18, 7/18, 1/18)^{\mathrm{T}} \otimes (-5/18, 7/18, 1/18)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 25/324 & -35/324 & -5/324 \\ -35/324 & 49/324 & 7/324 \\ -5/324 & 7/324 & 1/324 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

同样可以得到：

$$\mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} 1/324 & -5/324 & 7/324 \\ -5/324 & 25/324 & -35/324 \\ 7/324 & -35/324 & 49/324 \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{B}_3 = \begin{pmatrix} 49/324 & 7/324 & -35/324 \\ 7/324 & 1/324 & -5/324 \\ -35/324 & -5/324 & 25/324 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

容易验证,张量 $\mathcal{B}$ 是循环张量,且每个行张量都是秩 1 的.

2.2 循环张量的左右逆矩阵

对于循环矩阵的左右逆张量,已经清楚知道了其存在性、唯一性以及结构特点.现在,考虑这些结论是否适用于阶数大于等于 3 的循环张量.本文中首先讨论下循环张量的左右逆矩阵.

定理 3 (循环张量的右逆矩阵)令 $\mathcal{A} \in C_{m,n}$,当它的根张量 $\mathcal{A}_1 = \underbrace{a \otimes \cdots \otimes a}_{m-1}$ 且以 a 为根向量的循环矩阵非奇异时,存在 $B \in T_{2,n}$,使得 $\mathcal{A}B = \mathcal{I} \in T_{m,n}$.

证明 因为 $\mathcal{A}B = \mathcal{I}$,可得到

$$b_j^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_l b_k = \begin{cases} 1, & j = l = k \in [n], \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{14}$$

这里 b_j 是矩阵 B 的第 j 列向量,$\mathcal{A}_l$ 是张量 $\mathcal{A}$ 的第 l 个行张量.

进而,令

$$C = (\mathcal{A}_1 b_1, \mathcal{A}b_2 \cdots, \mathcal{A}_n b_n) \in T_{2,n},$$

可得到

$$B^{\mathrm{T}} C = I. \tag{15}$$

这里 I 是维数 n 的单位矩阵.

注意矩阵 B 是非奇异的.由张量乘积的性质可得 $\mathcal{A} = \mathcal{I}B^{-1}$.那么

$$\mathcal{A}_1 = B^{-\mathrm{T}}\ \mathcal{I}_1 B^{-1} = \underbrace{b_1 \otimes \cdots \otimes b_1}_{m-1},$$

这里 b_1^{T} 是 B^{-1} 的第一行向量.

满足上述条件时,右逆矩阵虽然存在,但不一定是唯一的,也不一定有循环结构.

例 3 设 $\mathcal{A} \in C_{3,3}$,它的根张量是 $\mathcal{A}_1 = (1,2,3)^{\mathrm{T}} \otimes (1,2,3)^{\mathrm{T}} \in T_{2,3}$.求矩阵 $B \in T_{2,3}$,使得 $\mathcal{A}B = \mathcal{I} \in T_{3,3}$.

求解:因为根张量

$$\mathcal{A}_1 = (1,2,3)^{\mathrm{T}} \otimes (1,2,3)^{\mathrm{T}} \in T_{2,3},$$

所以

$$b_1 = (1,2,3)^{\mathrm{T}} \text{ 或 } (-1,-2,-3)^{\mathrm{T}}.$$

同理,b_2,b_3 也都有 2 种情况.综合在一起,矩阵 B 总共有 8 种情况,可以求得 2 种：

$$B = \begin{pmatrix} -5/18 & 7/18 & 1/18 \\ 1/18 & -5/18 & 7/18 \\ 7/18 & 1/18 & -5/18 \end{pmatrix},$$
$$B' = \begin{pmatrix} 5/18 & -7/18 & -1/18 \\ -1/18 & 5/18 & -7/18 \\ -7/18 & -1/18 & 5/18 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

是右逆循环矩阵.而其他的 6 种：

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/18 & 7/18 & 1/18 \\ -1/18 & -5/18 & 7/18 \\ -7/18 & 1/18 & -5/18 \end{pmatrix},$$
$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} -5/18 & -7/18 & -1/18 \\ 1/18 & 5/18 & -7/18 \\ 7/18 & -1/18 & 5/18 \end{pmatrix},$$
$$B^{(3)} = \begin{pmatrix} -5/18 & -7/18 & 1/18 \\ 1/18 & 5/18 & 7/18 \\ 7/18 & -1/18 & -5/18 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{(4)}=\begin{pmatrix}5/18 & 7/18 & -1/18\\ -1/18 & -5/18 & -7/18\\ -7/18 & 1/18 & 5/18\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{(5)}=\begin{pmatrix}-5/18 & 7/18 & -1/18\\ 1/18 & -5/18 & -7/18\\ 7/18 & 1/18 & 5/18\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{(6)}=\begin{pmatrix}5/18 & -7/18 & 1/18\\ -1/18 & 5/18 & 7/18\\ -7/18 & -1/18 & -5/18\end{pmatrix},\tag{17}$$

仅是右逆矩阵,并不具有循环结构.

定理 4 (循环张量的左逆矩阵)令 $\mathcal{A}\in C_{m,n}$,当它的根张量 $\mathcal{A}_1$ 是对角的,并且这些对角元素组成的循环矩阵是非奇异时,存在唯一循环矩阵 $\boldsymbol{B}\in T_{2,n}$,使得 $\boldsymbol{B}\mathcal{A}=\mathcal{I}\in T_{m,n}$.

证明 存在唯一性:

由定义 1 可以得到

$$(\boldsymbol{B}\mathcal{A})_{ii_1i_2\cdots i_{m-1}}=\sum_j^n b_{ij}a_{ji_1i_2\cdots i_{m-1}}=\begin{cases}1, i=i_1=i_2\cdots=i_{m-1}=l\in[n];\\ 0,\text{其他}.\end{cases}\tag{18}$$

令

$$\boldsymbol{a}_l=(a_{1l\cdots l},a_{2l\cdots l},\cdots,a_{nl\cdots l})^{\mathrm{T}},$$

可以得到方程

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}_l=\boldsymbol{e}_l,\tag{19}$$

这里 $\boldsymbol{e}_l=(0,\cdots,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$是只有第 l 个元素为 1,其他元素均为 0 的单位向量.

进一步,令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$,得到方程

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I},\tag{20}$$

这里 $\boldsymbol{I}$ 是维数 n 的单位矩阵.不难发现矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是非奇异的.由张量乘积的性质可得$\mathcal{A}=\boldsymbol{B}^{-1}\mathcal{I}$.

循环结构:

$$\mathcal{A}=\boldsymbol{B}^{-1}\mathcal{I},$$
$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\mathcal{I}\boldsymbol{P},$$
$$\mathcal{A}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\mathcal{I}\boldsymbol{P}),$$
$$\mathcal{A}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P})\mathcal{I},$$
$$\boldsymbol{B}^{-1}\mathcal{I}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}\mathcal{I},$$
$$(\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P})\mathcal{I}=0,$$
$$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}.\tag{21}$$

最后一步的等价关系由文献[4]中的引理 2.1 保证.

例 4 设 $\mathcal{A}\in C_{3,3}$,它的根张量是 $\mathcal{A}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.求矩阵 $\boldsymbol{B}\in T_{2,3}$,使得 $\boldsymbol{B}\mathcal{A}=\mathcal{I}\in T_{3,3}$.

求解:对角元素为 (1,2,3),可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

根据 $\boldsymbol{BA}=\mathcal{I}$,求得

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-5/18 & 1/18 & 7/18\\ 7/18 & -5/18 & 1/18\\ 1/18 & 7/18 & -5/18\end{pmatrix}.$$

容易验证矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是左逆循环矩阵.

2.3 循环张量的左右逆张量

现在,讨论下高阶循环张量的左右逆张量,研究它们的存在性、唯一性和结构性.

定理 5 (循环张量的右逆张量)令 $\mathcal{A}\in C_{m,n}$,当它的根张量 $\mathcal{A}_1=\underbrace{\boldsymbol{a}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{a}}_{m-1}$,且以 $\boldsymbol{a}$ 为根向量的循环矩阵非奇异时,存在张量 $\mathcal{B}\in T_{k,n}$,使得 $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{I}\in T_{(m-1)(k-1)+1,n}$,且其行张量都是对角的.

证明 根据定理 3,存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得

$$\mathcal{A}\boldsymbol{B}=\mathcal{I}.\tag{22}$$

同样,非奇异矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$存在右逆张量 $\mathcal{B}\in T_{k,n}$,使得 $\boldsymbol{B}^{-1}\mathcal{B}=\mathcal{I}$,且其行张量都是对角的.

因此

$$\mathcal{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}\mathcal{B}=\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{I}.\tag{23}$$

根据定理 3,循环张量的右逆矩阵不唯一且不一定具有循环结构,因此循环张量的右逆张量同样不唯一且不一定具有循环结构.

定理 6 (循环张量的左逆张量)令 $\mathcal{A}\in C_{m,n}$,当它的根张量$\mathcal{A}_1$ 是对角的,并且这些对角元素组成的循环矩阵是非奇异时,存在唯一循环张量 $\mathcal{B}\in T_{k,n}$,使得 $\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{I}\in T_{(k-1)(m-1)+1,n}$,且其行张量都是秩 1 的.

证明 根据定理 4,存在唯一非奇异循环矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得

$$\boldsymbol{B}\mathcal{A}=\mathcal{I}.\tag{24}$$

同样,非奇异循环矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$存在唯一左逆循环张量$\mathcal{B}\in T_{k,n}$,使得$\mathcal{B}\boldsymbol{B}^{-1}=\mathcal{I}$,且其行张量都是秩 1 的.因此

$$\mathcal{B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\mathcal{A}=\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{I}.\tag{25}$$

3 结　论

通过上述讨论,可以发现以参考文献[4]中的张量积定义为基础,能求逆的循环张量是不够全面的,

只有满足一定的结构时,才存在左右逆,且左右逆的唯一性和结构性还不一定能得到保证.后续工作希望通过不断的努力,能找到一个更加合适的张量积定义.

参考文献:

[1] COX D,LITTLE J,O'SHEA D.Using algebraic geometry [M].New York:Springer,1998:1-572.

[2] GELFAND I, KAPRANOV M, ZELEVINSKY A. Discriminants,resultants and multidimensional determinants [M].Boston:Birkhäuser,1994:1189-1214.

[3] LIM L H.Tensors and hypermatrices[M]// Handbook of Linear Algebra.Boca Raton,FL:CRC Press,2013:1-30.

[4] BU C J,ZHANG X,ZHOU J,et al.The inverse,rank and product of tensors [J]. Linear Algebra and Its Applications,2014,446:269-280.

[5] CHEN Z M,QI L Q.Circulant tensors:native eigenvalues and symmetrization [EB/OL]. [2014-06-05]. https://arxiv.org/abs/1312.2752v6.

[6] HU S L,HUANG Z H,LING C,et al.On determinants and eigenvalue theory of tensors[J].Journal of Symbolic Computation,2013,50:508-531.

[7] SHAO J Y.A general product of tensors with applications [J].Linear Algebra Appl,2013,439:2350-2366.

The Inverse of Loop Tensors

XU Xiaoling[1], WANG Teng[2*]

(1.Department of Mathmatics,Minjiang University,Fuzhou 350108,China;
2.School of Mathmatical Sciences,Xiamen University,Xiamen 361005,China)

Abstract: Basic definitions and characteristics of tensor products,loop tensors,and tensors of the inverse were introduced.The character of the structure and the inverse of the loop tensor,whose inverse could be solved,were provided.The solution procedure for the inverse of loop tensor was described along with some examples.

Key words: loop tensor;inverse tensor;tensor