doi：10.1043/j.issn.0438-0479.201601028

广义长方形张量的注记

刘冰杰[1], 边红[1*], 于海征[2], 马丽[1]
(1新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830054;
2新疆大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘要 Perron-Frobenius 定理是非负矩阵的基本结果. 特别地, 非负张量的Perron-Frobenius 定理与测量链接对象的高阶连通性和超图有关. 在这篇文章中,我们在长方形张量的基础上定义一个广义长方形张量, 并给出了非负广义长方形张量的Perron-Frobenius 定理的一些新的结果.
关键词： 特征值; 三维长方形张量; 不可约; Perron-Frobenius 定理
中图分类号： 0157

引言

Perron-Frobenius 定理描述了一个非负实方矩阵A 的主要特征值的特征向量的性质. 这个定理在概率论(马尔科夫链的遍历性)和动力系统理论(有限的子类型)中有重要的应用价值,也在应用数学的领域中起着至关重要的作用.

假设m和n都是正整数, 且$m, n \geq 2$, 我们称$\mathcal{B} = (b_{i_1\ldots i_m})$, 这里$b_{i_1\ldots i_m} \in \mathcal{R}$,对于$i_k = 1, 2, ..., n, k = 1, 2, ..., m$, 是一个实$m$ 阶$n-$维方张量. 当$m = 2$ 时, $\mathcal{B}$ 是一个简单的实$n \times n$ 方矩阵.

祁立群等人和林立行在文献[1, 2] 中介绍了方张量的特征值, 并且给出了非负方张量的特征值的perron-Frobenius 定理的一些好的性质. 此外, 方张量的特征值有广泛的实际应用. 比如医疗磁共振成像[3], 高阶马尔科夫链[4]; 自动控制中偶阶多变量形式的正定性[5], 和数据分析的秩一优化[6].

最近, 某一类长方形张量吸引了研究人员的注意. 它们出现在固体力学的强椭圆条件问题[7, 8, 9, 10] 和量子力学的扰动问题[11, 12]. 假设p, q, m, n 都是正整数，并且$m, n \geq 2$, 我们称$\mathcal{A} = (a_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_q})$, 这里$a_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_q} \in \mathcal{R}$,对于$i_k = 1, 2, ..., m, k = 1, 2, ..., p,$, $j_k = 1, 2, ..., n, k = 1, 2, ..., q,$, 是一个实$(p, q)$ 阶$(m \times n)-$ 维长方形张量. 当$p = q = 1$ 时, $\mathcal{A}$ 是一个简单的实$m \times n$ 长方形矩阵.

Perron-Frobenius 定理是非负矩阵的一个基本结果. 它不仅在许多数学分支: 马尔科夫链、图论、对策论和数值分析上有很多应用, 也在科学与技术的很多领域: 经济学、运筹学和最近的互联网网络排名上有很多应用. 它的无限维推广被称为正线性紧算子的Krein Rutman 定理, 也被广泛应用于偏微分方程, 不动点定理和泛函分析. 在后期多线性代数的研究[1, 2, 13], 张量的特征值问题已经带来的特别关注. 特别地, 非负张量的Perron-Frobenius 定理与测量链接对象的高阶连通性[14] 和超图[15] 有关.

在这篇文章中, 我们在长方形张量的基础上定义一个广义长方形张量, 并且给出有关非负广义长方形张量的Perron-Frobenius定理的一些结果.

2 预备知识

在这一节, 我们将给出一些用于主要结果证明的定义和概念.

收到日期：2016-01-18　　录用日期：2017-02-17
基金项目：国家自然科学基金（11361062,61662079,11061035）；自治区青年科技创新人才培养工程项目（qn2015yx010）；新疆高校科研重点项目（XJEDU2013I04).
通信作者：bh1218@163.com

假设p,q,r,m,n,l 是正整数, 并且$m,n,l \geq 2$. 我们称, $a_{i_1...i_pj_1...j_qk_1...k_r} \in R$, 其中$i_h = 1,...,m$, $h=1,...,p$, $j_h=1,...,n$, $h=1,...,q$, $k_h=1,...,l$, $h=1,...,r$, 是一个实(p,q,r)阶$(m\times n\times l)$-维**广义长方形张量**.

让

$$f(x,y,z) \equiv \mathscr{A}x^py^qz^r \equiv \sum_{i_1,...,i_p=1}^{m}\sum_{j_1,...,j_q=1}^{n}\sum_{k_1,...,k_r=1}^{l} a_{i_1...i_pj_1...j_qk_1...k_r}x_{i_1}...x_{i_p}y_{j_1}...y_{j_q}z_{k_1}...z_{k_r}.$$

当$p=q=r=2$ 时, $\mathscr{A}$ 是一个(2, 2, 2) 阶长方形张量. 如果$a_{122112}=1$, 其余的$a_{ijklst}=0$, 那么$f(x,y,z)=x_1x_2y_2y_1z_1z_2$.

对于任意的向量x 和任意的实数α, 定义$x^{[\alpha]}=[x_1^\alpha,x_2^\alpha,...,x_n^\alpha]^T$.

让$\mathscr{A}x^{p-1}y^qz^r$ 是属于R^m 的一个向量, 使得

$$(\mathscr{A}x^{p-1}y^qz^r)_i = \sum_{i_2,...,i_p=1}^{m}\sum_{j_1,...,j_q=1}^{n}\sum_{k_1,...,k_r=1}^{l} a_{ii_2...i_pj_1...j_qk_1...k_r}x_{i_2}...x_{i_p}y_{j_1}...y_{j_q}z_{k_1}...z_{k_r}, i=1,2,...,m.$$

同样地, $\mathscr{A}x^py^{q-1}z^r$ 是属于R^n 的一个向量, 使得

$$(\mathscr{A}x^py^{q-1}z^r)_j = \sum_{i_1,...,i_p=1}^{m}\sum_{j_2,...,j_q=1}^{n}\sum_{k_1,...,k_r=1}^{l} a_{i_1...i_pjj_2...j_qk_1...k_r}x_{i_1}...x_{i_p}y_{j_2}...y_{j_q}z_{k_1}...z_{k_r}, j=1,2,...,n.$$

$\mathscr{A}x^py^qz^{r-1}$ 是属于R^l 的一个向量, 使得

$$(\mathscr{A}x^py^qz^{r-1})_k = \sum_{i_1,...,i_p=1}^{m}\sum_{j_1,...,j_q=1}^{n}\sum_{k_2,...,k_r=1}^{l} a_{i_1...i_pj_1...j_qkk_2...k_r}x_{i_1}...x_{i_p}y_{j_1}...y_{j_q}z_{k_2}...z_{k_r}, k=1,2,...,l.$$

在这篇文章中, 我们定义$M=p+q+r$, $N=m+n+l$. 对于一个向量$x=(x_1,x_2,...,x_m)^T \in C^m$, 一个整数M, 定义$x^{[M-1]}=[x_1^{M-1},x_2^{M-1},...,x_m^{M-1}]^T$. 同样地, 对于$y^{[M-1]}$, $y\in C^n$, $z^{[M-1]}$, $z\in C^l$也一样. 考虑

$$\begin{cases} \mathscr{A}x^{p-1}y^qz^r = \lambda x^{[M-1]}, \\ \mathscr{A}x^py^{q-1}z^r = \lambda y^{[M-1]}, \\ \mathscr{A}x^py^qz^{r-1} = \lambda z^{[M-1]}. \end{cases} \tag{1}$$

如果$\lambda\in C, x\in C^m\setminus 0, y\in C^n\setminus 0, y\in C^l\setminus 0$ 是(1) 的解, 那么λ 是$\mathscr{A}$ 的一个奇异值, x,y,z 是$\mathscr{A}$关于奇异值λ 的特征向量. 如果$\lambda\in R, x\in R^m\setminus 0, y\in R^n\setminus 0, z\in R^l\setminus 0$ 是(1) 的解, 则λ 是$\mathscr{A}$ 的H-奇异值, x,y,z 是关于$\mathscr{A}$ 的H 奇异值λ 的H-特征向量. 如果一个奇异值不是H-奇异值, 我们就称为$\mathscr{A}$ 的N-奇异值. 当$p=q=1$, $r=0$ 时, 那么这就是一般的长方形矩阵奇异值的定义. 因此, 这个定义把长方形矩阵的奇异值的传统概念推广到高阶广义长方形张量.

3 主要结果

在这一节, 我们把非负长方形张量奇异值的Perron-Frobenius 定理推广到广义长方形张量. 首先给出不可约广义长方形张量的定义.

记$P_k=\{x\in R^k: x_i\geq 0, i=1,2,...,k\}$, $int(P_k)=\{x\in R^k: x_i>0, i=1,2,...,k\}$. 一个向量$x\in R^k$ 被称为非负的, 如果$x\in P_k$; 被称为强正的, 如果$x\in intP_k$. 规定R^k 的零向量为θ.

让$\mathscr{A} = (a_{i_i \dots i_p j_1 \dots j_q k_1 \dots k_r})$ 是一个(p, q, r) 阶$(m \times n \times l)$-维非负长方形张量, 这里$p, q, r \geq 1$. 定义$\{e_i\}_1^m$, $\{f_j\}_1^n$ 和$\{g_k\}_1^l$ 分别是R^m, R^n 和R^l 的基, 且$e_i^p = \underbrace{e_i \otimes \dots \otimes e_i}_{p}$, $f_j^q = \underbrace{f_j \otimes \dots \otimes f_j}_{q}$ 和$g_k^r = \underbrace{g_k \otimes \dots \otimes g_k}_{r}$, 这里$\otimes$ 是向量的张量积符号.

对于任意的$j = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, l$, 定义$\mathscr{A}(\cdot, f_j^q, g_k^r) = (a_{i_1, \dots, i_p, j, \dots, j, k, \dots, k})$ 是一个p 阶m-维方张量.

对于任意的$i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, l$, 定义$\mathscr{A}(e_i^p, \cdot, g_k^r) = (a_{i, \dots, i, j_1, \dots, j_q, k, \dots, k})$ 是一个q 阶n-维方张量.

对于任意的$i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, 定义$\mathscr{A}(e_i^p, f_j^q, \cdot) = (a_{i, \dots, i, j, \dots, j, k_1, \dots, k_r})$ 是一个r 阶l-维方张量.

定义 1. 在文献[16]中提出, 一个非负长方形张量$\mathscr{A}$ 被称为不可约的, 如果所有的方张量$\mathscr{A}(\cdot, f_j^q, g_k^r), j = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, l$, $\mathscr{A}(e_i^p, \cdot, g_k^r), i = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, l$ 和$\mathscr{A}(e_i^p, f_j^q, \cdot), i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$ 都是不可约的.

引理 2. 如果$\mathscr{A}$ 是不可约的, 那么所有的张量$\mathscr{A}(\cdot, f_j^q, g_k^r), j = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, l$, $\mathscr{A}(e_i^p, \cdot, g_k^r), i = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, l$ 和$\mathscr{A}(e_i^p, f_j^q, \cdot), i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$, 没有特征值0.

证明. 假设结论不成立. 那么, 存在j_0, k_0 使得$\mathscr{A}(\cdot, f_j^q, g_k^r)$ 有特征值0 或存在i_0, k_0 使得$\mathscr{A}(e_i^p, \cdot, g_k^r)$ 有特征值0 或存在i_0, j_0 使得$\mathscr{A}(e_i^p, f_j^q, \cdot)$ 有特征值0. 不妨设$\mathscr{A}(\cdot, f_j^q, g_k^r)$ 有特征值0, i.e., $\exists x_o \neq \theta$, 使得$\mathscr{A}(x_0^{p-1}, f_j^q, g_k^r) = \theta$. 如果$(x_0)_i > 0, \forall i$, 则$\mathscr{A}(\cdot, f_j^q, g_k^r) = 0$, 那么$\mathscr{A}(\cdot, f_j^q, g_k^r)$ 可约, 矛盾. 另一方面, 存在一个非空指数集I 和$\delta > 0$, 使得$(x_0)_i = 0, \forall i \in I$, 且$(x_0)_i \geq \delta, \forall i \notin I$. 我们有

$$\begin{aligned} &\delta^{p-1} \sum_{i_2, \dots, i_p \notin I} a_{i i_2 \dots i_p j_0 \dots j_0 k_0 \dots k_0} \\ &\leq \sum_{1 \leq i_2, \dots, i_p \leq m} a_{i i_2 \dots i_p j_0 \dots j_0 k_0 \dots k_0} (x_0)_{i_2} \dots (x_0)_{i_p} \\ &= \mathscr{A}(x_0^{p-1}, f_j^q, g_k^r) = 0, \quad \forall i. \end{aligned}$$

这表明

$$a_{i_1 i_2 \dots i_p j_0 \dots j_0 k_0 \dots k_0} = 0, \forall i_1 \in I, \forall i_2, \dots, i_p \notin I.$$

则$\mathscr{A}(\cdot, f_j^q, g_k^r)$ 是可约的, 矛盾.

同理我们可以证明$\mathscr{A}(e_i^p, \cdot, g_k^r)$ 和$\mathscr{A}(e_i^p, f_j^q, \cdot)$ 没有特征值0. □

引理 3. 如果$\mathscr{A}$ 是不可约的, 那么对于任意的$(x, y, z) \in (P_m \setminus \{\theta\}) \times (P_n \setminus \{\theta\}) \times (P_l \setminus \{\theta\})$, $\mathscr{A} x^{p-1} y^q z^r \neq \theta$, $\mathscr{A} x^p y^{q-1} z^r \neq \theta$ 和$\mathscr{A} x^p y^q z^{r-1} \neq \theta$.

证明. 假设$\mathscr{A} x^{p-1} y^q z^r = \theta$, i.e., $(\mathscr{A} x^{p-1} y^q z^r)_i = 0$, $\forall i$. 因为$y, z \neq \theta$, $\exists j_0, k_0$ 和$\delta > 0$ 使得$y \geq \delta f_{j_0}, z \geq \delta h_{k_0}$, 我们有

$$0 = (\mathscr{A} x^{p-1} y^q z^r)_i \geq \delta^{q+r} (\mathscr{A} x^{p-1}, f_{j_o}^q, g_{k_o}^r)_i \geq 0, \quad \forall i.$$

即,

$$\mathscr{A}(x^{p-1}, f_{j_o}^q, g_{k_o}^r) = \theta.$$

这就是说x 是$\mathscr{A}(\cdot, f_{j_o}^q, g_{k_o}^r)$ 的一个关于特征值0 的特征向量. 根据引理2, 这是一个矛盾.

同理我们可以证明$\mathscr{A} x^p y^{q-1} z^r \neq \theta$ 和$\mathscr{A} x^p y^q z^{r-1} \neq \theta$. □

引理 4. 让$\mathscr{A}$ 非负且不可约, 且$(\lambda, (x, y, z)) \in R_+ \times int(P_m) \times int(P_n) \times int(P_l)$ 是(1)的一个解. 如果$(\mu, (u, v, w)) \in R_+ \times ((P_m \setminus \{\theta\}) \times (P_n \setminus \{\theta\}) \times (P_l \setminus \{\theta\}))$ 满足

$$\begin{aligned} &(i) \quad \mathscr{A} u^{p-1} v^q w^r \geq (or \leq) \mu u^{[M-1]} \\ &(ii) \quad \mathscr{A} u^p v^{q-1} w^r \geq (or \leq) \mu v^{[M-1]} \\ &(iii) \quad \mathscr{A} u^p v^q w^{r-1} \geq (or \leq) \mu w^{[M-1]} \end{aligned}$$

那么$\mu \le (or \ge resp.)\lambda$

证明. 定义$t_0 = max\{s \ge 0 | x - su \in P_m, y - sv \in P_n, z - sw \in P_l\}$. 因为$(x, y, z) \in int(P_m) \times int(P_n) \times int(P_l), t_0 > 0$. 所以, 我们有

$$\begin{cases} x - tu \ge 0, \\ y - tv \ge 0, \\ z - tw \ge 0. \end{cases} \tag{2}$$

当且仅当$t \in [0, t_0]$. 因此

$$\begin{cases} \lambda x^{[M-1]} = \mathscr{A} x^{p-1} y^q z^r \ge t_0^{M-1} \mathscr{A} u^{p-1} v^q w^r \ge t_0^{M-1} \mu u^{[M-1]}, \\ \lambda y^{[M-1]} = \mathscr{A} x^p y^{q-1} z^r \ge t_0^{M-1} \mathscr{A} u^p v^{q-1} w^r \ge t_0^{M-1} \mu v^{[M-1]}, \\ \lambda z^{[M-1]} = \mathscr{A} x^p y^q z^{r-1} \ge t_0^{M-1} \mathscr{A} u^p v^q w^{r-1} \ge t_0^{M-1} \mu w^{[M-1]}. \end{cases} \tag{3}$$

i.e.,

$$\begin{cases} x \ge t_o (\frac{\mu}{\lambda})^{\frac{1}{M-1}} u, \\ y \ge t_o (\frac{\mu}{\lambda})^{\frac{1}{M-1}} v, \\ z \ge t_o (\frac{\mu}{\lambda})^{\frac{1}{M-1}} w. \end{cases} \tag{4}$$

这表明$\mu \le \lambda$. □

定理 5. 假设非负张量$\mathscr{A}$ 是不可约的, 则存在(1)的一个解$(\lambda_0, (x_0, y_0, z_0))$, 满足$\lambda_0 > 0$和$(x_0, y_0, z_0) \in int(P_m) \times int(P_n) \times int(P_l)$.

而且, 如果λ 是强正特征向量的一个奇异值, 则$\lambda = \lambda_0$. 这个强正特征向量在重数意义下是唯一的.

证明. 定义$D_k = \{z = (z_1, ..., z_k) \in P_k | \sum_{i=1}^{k} z_i = 1\}$. 由引理3, F 在$D_m \times D_n \times D_l$ 上到自身的映射被定义为:

$$F(\xi, \eta, \sigma) = (\frac{(\mathscr{A} \xi^{p-1} \eta^q \sigma^r)_i^{\frac{1}{M-1}}}{\sum_{i=1}^{m} (\mathscr{A} \xi^{p-1} \eta^q \sigma^r)_i^{\frac{1}{M-1}}}, \frac{(\mathscr{A} \xi^p \eta^{q-1} \sigma^r)_j^{\frac{1}{M-1}}}{\sum_{j=1}^{n} (\mathscr{A} \xi^p \eta^{q-1} \sigma^r)_j^{\frac{1}{M-1}}}, \frac{(\mathscr{A} \xi^p \eta^q \sigma^{r-1})_k^{\frac{1}{M-1}}}{\sum_{k=1}^{l} (\mathscr{A} \xi^p \eta^q \sigma^{r-1})_k^{\frac{1}{M-1}}}) \tag{5}$$

.

根据不动点定理, 存在$(\xi_0, \eta_0, \sigma_0) \in D_m \times D_n \times D_l$ 使得

$$\begin{cases} \mathscr{A} \xi_o^{p-1} \eta_0^q \sigma_0^r = \mu_0 \xi_0^{[M-1]}, \\ \mathscr{A} \xi_o^p \eta_0^{q-1} \sigma_0^r = \nu_0 \eta_0^{[M-1]}, \\ \mathscr{A} \xi_o^p \eta_0^q \sigma_0^{r-1} = \omega_0 \sigma_0^{[M-1]}. \end{cases} \tag{6}$$

这里

$$\begin{cases} \mu_0 = (\sum_{i=1}^{m} (\mathscr{A} \xi_o^{p-1} \eta_0^q \sigma_0^r)_i^{\frac{1}{M-1}})^{M-1}, \\ \nu_0 = (\sum_{j=1}^{n} (\mathscr{A} \xi_o^p \eta_0^{q-1} \sigma_0^r)_j^{\frac{1}{M-1}})^{M-1} \\ \omega_0 = (\sum_{k=1}^{l} (\mathscr{A} \xi_o^p \eta_0^q \sigma_0^{r-1})_i^{\frac{1}{M-1}})^{M-1}. \end{cases} \tag{7}$$

定义$t = (\frac{\nu_0}{\mu_0})^{\frac{1}{M}}$, $s = (\frac{\omega_0}{\mu_0})^{\frac{1}{M}}$, $x_0 = \xi_0$, $y_0 = t\eta_0$, $z_0 = s\sigma_0$ 和$\lambda_0 = (\mu_0^p \nu_0^q \omega_0^r)^{\frac{1}{M}}$. 则, $(\lambda_0, (x_0, y_0, z_0))$ 是(1) 的一个解.

现在我们需要证明: $(x_0, y_0, z_0) \in int(P_m) \times int(P_n) \times int(P_l)$. 反证法, 假设这个结论不成立, 则需要证明存在一个非空真指标子集$I \subset \{1, ..., m\}$, 或者一个非空真指标子

集$J \subset \{1, ..., n\}$, 或者一个非空真指标子集$K \subset \{1, ..., l\}$, 使得$(x_0)_i = 0, \forall i \in I, (x_0)_i \geq \delta > 0, \forall i \notin I$, 或者$(y_0)_j = 0, \forall j \in J, (y_0)_j \geq \delta > 0, \forall j \notin J$, 或者$(z_0)_k = 0, \forall k \in K, (z_0)_k \geq \delta > 0, \forall k \notin K$.

因为$\mathscr{A}(\cdot, f^q_{j_o}, g^r_{k_o}), \forall j \in J, k \in K$ 是不可约的, 如果满足上述条件的非空真子集I 是存在的, $\forall i \in I, j \in J, k \in K$ 我们有

$$
\begin{aligned}
0 &= (\mathscr{A} x_0^{p-1} y_0^q z_0^r)_i \\
&= \sum_{1 \leq i_2, ..., i_p \leq m, 1 \leq j_1, ..., j_q \leq n, 1 \leq k_1, ..., k_r \leq l} a_{ii_2...i_pj_1...j_qk_1...k_r} (x_0)_{i_2} ... (x_0)_{i_p} (y_0)_{j_1} ... y(_0)_{j_q} (z_0)_{k_1} ... (z_0)_{k_r} \\
&\geq \delta^{q+r} \sum_{1 \leq i_2, ..., i_p \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq l} a_{ii_2...i_pj...jk...k} (x_0)_{i_2} ... (x_0)_{i_p} \\
&\geq \delta^{M-1} \sum_{i_2, ..., i_p \notin I} a_{ii_2...i_pj...jk...k}.
\end{aligned}
$$

这与$\mathscr{A}(\cdot, f^q_{j_o}, g^r_{k_o}), \forall j \in J, k \in K$ 的不可约性矛盾.因此这样的非空真指标子集I 是不存在的. 同理, 我们可以证明这样的非空真指标子集J 和K 都是不存在的. 所以$(x_0, y_0, z_0) \in int(P_m) \times int(P_n) \times int(P_l)$.

强正特征向量的正奇异值的唯一性我们可以直接从引理4 得到. 以文献[16]中同样地方法可以证明强正特征向量在重数意义下是唯一的. □

下文把文献[16]中的非负张量唯一正特征值的强正特征向量的最大最小刻画推广到非负广义张量唯一正奇异值的强正特征向量.

定理 6. 假设$\mathscr{A}$ 是一个(p, q, r)阶$(m \times n \times l)$ 维的非负不可约长方形张量, 则

$$
\begin{aligned}
&\min_{(x,y,z) \in (P_m \setminus \{\theta\}) \times (P_n \setminus \{\theta\}) \times (P_l \setminus \{\theta\})} \max_{i,j,k} \left(\frac{(\mathscr{A} x^{p-1} y^q z^r)_i}{x_i^{M-1}}, \frac{(\mathscr{A} x^p y^{q-1} z^r)_j}{y_j^{M-1}}, \frac{(\mathscr{A} x^p y^q z^{r-1})_k}{z_k^{M-1}} \right) \\
=&\lambda_0 \\
=&\max_{(x,y,z) \in (P_m \setminus \{\theta\}) \times (P_n \setminus \{\theta\}) \times (P_l \setminus \{\theta\})} \min_{i,j,k} \left(\frac{(\mathscr{A} x^{p-1} y^q z^r)_i}{x_i^{M-1}}, \frac{(\mathscr{A} x^p y^{q-1} z^r)_j}{y_j^{M-1}}, \frac{(\mathscr{A} x^p y^q z^{r-1})_k}{z_k^{M-1}} \right),
\end{aligned}
$$

这里λ_0 是唯一的强正特征向量的正奇异值.

证明. 在$(P_m \setminus \{\theta\}) \times (P_n \setminus \{\theta\}) \times (P_l \setminus \{\theta\})$ 上, 我们定义一个函数:

$$
\mu_*(x, y, z) = \min_{i,j,k} \left(\frac{(\mathscr{A} x^{p-1} y^q z^r)_i}{x_i^{M-1}}, \frac{(\mathscr{A} x^p y^{q-1} z^r)_j}{y_j^{M-1}}, \frac{(\mathscr{A} x^p y^q z^{r-1})_k}{z_k^{M-1}} \right).
$$

因为它是一个正的0-齐次函数, 能够限制在$(D_m) \times (D_n) \times (D_l)$ 上. 让

$$
r_* := \mu_*(x_*, y_*, z_*) = \max_{x \in D_m, y \in D_n, z \in D_l} \mu_*(x, y, z) = \max_{(x,y,z) \in (P_m \setminus \{\theta\}) \times (P_n \setminus \{\theta\}) \times (P_l \setminus \{\theta\})} \mu_*(x, y, z).
$$

$(\lambda_0, (x_0, y_0, z_0)) \in R_+ \times int(P_m) \times int(P_n) \times int(P_l)$ 是(1.1)的一个解. 一方面我们有

$$
\lambda_0 = \mu_*(x_0, y_0, z_0) \leq \mu_*(x_*, y_*, z_*),
$$

i.e.,

$$
\lambda_0 \leq r_*.
$$

另一方面, 由$\mu_*(x, y, z)$ 的定义, 我们得到

$$
r_* = \mu_*(x_*, y_*, z_*) = \min_{i,j,k} \left(\frac{(\mathscr{A} x_*^{p-1} y_*^q z_*^r)_i}{(x_*)_i^{M-1}}, \frac{(\mathscr{A} x_*^p y_*^{q-1} z_*^r)_j}{(y_*)_j^{M-1}}, \frac{(\mathscr{A} x_*^p y_*^q z_*^{r-1})_k}{(z_*)_k^{M-1}} \right).
$$

即

$$\begin{cases} \mathscr{A} x_*^{p-1} y_*^q z_*^r \geq r_* x_*^{[M-1]}, \\ \mathscr{A} x_*^p y_*^{q-1} z_*^r \geq r_* y_*^{[M-1]}, \\ \mathscr{A} x_*^p y_*^q z_*^{r-1} \geq r_* z_*^{[M-1]}. \end{cases} \tag{8}$$

根据引理4, 我们有$r_* \leq \lambda_0$, 因此

$$\lambda_0 = r_*.$$

同理, 我们可以证明另一个等式. □

因此, 我们有

定理 7. 假设$\mathscr{A}$ 是一个非负不可约长方形张量, λ_0 是强正特征向量的正奇异值. 则对于$\mathscr{A}$ 的所有奇异值λ有$|\lambda| \leq \lambda_0$.

证明. 让$(x, y, z) \in ((C^m \setminus \{\theta\}) \times (C^n \setminus \{\theta\}) \times (C^l \setminus \{\theta\}))$ 是(1)的一个解. 对于任意的$\lambda \in C$. 我们需要证明$|\lambda| \leq \lambda_0$. 让$x_i^{'} = |x_i|, \forall i \quad y_j^{'} = |y_j|, \forall j \quad z_k^{'} = |z_k|, \forall k$, 集合$x^{'} = (x_1^{'}, ..., x_m^{'}), y^{'} = (y_1^{'}, ..., y_n^{'}), z^{'} = (z_1^{'}, ..., z_l^{'})$. 显然, $(x^{'}, y^{'}, z^{'}) \in ((P^m \setminus \{\theta\}) \times (P^n \setminus \{\theta\}) \times (P^l \setminus \{\theta\}))$.

因为

$$\begin{aligned} |(\mathscr{A} x^{p-1} y^q z^r)_i| &= |\sum_{i_2,...,i_p=1}^{m} \sum_{j_1,...,j_q=1}^{n} \sum_{k_1,...,k_r=1}^{l} a_{ii_2...i_pj_1...j_qk_1...k_r} x_{i_2}...x_{i_p} y_{j_1}...y_{j_q} z_{k_1}...z_{k_r}| \\ &\leq \sum_{i_2,...,i_p=1}^{m} \sum_{j_1,...,j_q=1}^{n} \sum_{k_1,...,k_r=1}^{l} a_{ii_2...i_pj_1...j_qk_1...k_r} x_{i_2}^{'}...x_{i_p}^{'} y_{j_1}^{'}...y_{j_q}^{'} z_{k_1}^{'}...z_{k_r}^{'} \\ &= (\mathscr{A}(x^{'})^{p-1}(y^{'})^q(z^{'})^r)_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(\mathscr{A} x^p y^{q-1} z^r)_j| &= |\sum_{i_1,...,i_p=1}^{m} \sum_{j_2,...,j_q=1}^{n} \sum_{k_1,...,k_r=1}^{l} a_{i_1...i_pjj_2...j_qk_1...k_r} x_{i_1}...x_{i_p} y_{j_2}...y_{j_q} z_{k_1}...z_{k_r}| \\ &\leq \sum_{i_1,...,i_p=1}^{m} \sum_{j_2,...,j_q=1}^{n} \sum_{k_1,...,k_r=1}^{l} a_{i_1...i_pjj_2...j_qk_1...k_r} x_{i_1}^{'}...x_{i_p}^{'} y_{j_2}^{'}...y_{j_q}^{'} z_{k_1}^{'}...z_{k_r}^{'} \\ &= (\mathscr{A}(x^{'})^{p}(y^{'})^{q-1}(z^{'})^r)_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(\mathscr{A} x^p y^q z^{r-1})_i| &= |\sum_{i_1,...,i_p=1}^{m} \sum_{j_1,...,j_q=1}^{n} \sum_{k_2,...,k_r=1}^{l} a_{i_1...i_pj_1...j_qkk_2...k_r} x_{i_1}...x_{i_p} y_{j_1}...y_{j_q} z_{k_2}...z_{k_r}| \\ &\leq \sum_{i_1,...,i_p=1}^{m} \sum_{j_1,...,j_q=1}^{n} \sum_{k_2,...,k_r=1}^{l} a_{i_1...i_pj_1...j_qkk_2...k_r} x_{i_1}^{'}...x_{i_p}^{'} y_{j_1}^{'}...y_{j_q}^{'} z_{k_2}^{'}...z_{k_r}^{'} \\ &= (\mathscr{A}(x^{'})^{p}(y^{'})^{q}(z^{'})^{r-1})_k \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} |\lambda|(x_i^{'})^{M-1} = |\lambda||x_i|^{M-1} = |(\mathscr{A} x^{p-1} y^q z^r)_i| \leq (\mathscr{A}(x^{'})^{p-1}(y^{'})^q(z^{'})^r)_i, \quad \forall i, \\ |\lambda|(y_j^{'})^{M-1} = |\lambda||y_j|^{M-1} = |(\mathscr{A} x^{p} y^{q-1} z^r)_j| \leq (\mathscr{A}(x^{'})^{p}(y^{'})^{q-1}(z^{'})^r)_j, \quad \forall j, \\ |\lambda|(z_k^{'})^{M-1} = |\lambda||z_k|^{M-1} = |(\mathscr{A} x^{p} y^q z^{r-1})_k| \leq (\mathscr{A}(x^{'})^{p}(y^{'})^q(z^{'})^{r-1})_k, \quad \forall k. \end{aligned}$$

由定理6, 我们得到

$$\begin{aligned}|\lambda| &\le \min_{i,j,k}(\frac{(\mathscr{A}(x^{'})^{p-1}(y^{'})^{q}(z^{'})^{r})_i}{(x_i^{'})^{M-1}}, \frac{(\mathscr{A}(x^{'})^{p}(y^{'})^{q-1}(z^{'})^{r})_j}{(y_j^{'})^{M-1}}, \frac{(\mathscr{A}(x^{'})^{p}(y^{'})^{q}(z^{'})^{r-1})_k}{(z_k^{'})^{M-1}})\\ &\le \max_{(x,y,z)\in(P_m\setminus\{\theta\})\times(P_n\setminus\{\theta\})\times(P_l\setminus\{\theta\})} \min_{i,j,k}(\frac{(\mathscr{A}x^{p-1}y^{q}z^{r})_i}{x_i^{M-1}}, \frac{(\mathscr{A}x^{p}y^{q-1}z^{r})_j}{y_j^{M-1}}, \frac{(\mathscr{A}x^{p}y^{q}z^{r-1})_k}{z_k^{M-1}})\\ &= \lambda_0.\end{aligned}$$

□

4 一种算法

在这一节中, 在定理6 和定理7 的基础上, 我们给出一种计算一个非负不可约广义长方形张量最大特征值的算法. 这个算法类似文献[4]中找到一个非负不可约方张量的最大特征值. 首先给出一些下文需要用到的结果.

对于任意两个向量$x \in R^k$ 和$y \in R^k$, 则$x \ge y$ 和$x > y$ 分别意味着$x - y \in P_k$ 和$x - y \in int(P_k)$. 这里的P_k 和$int(P_k)$ 在第四节中定义. 通过直接计算, 我们得到以下引理.

引理 8. 假设$\mathscr{A}$ 是一个(p, q, r) 阶$(m \times n \times l)$-维的非负长方形张量, $x \in R^m, \overline{x} \in R^m$, $y \in R^n, \overline{y} \in R^n$, $z \in R^l, \overline{z} \in R^l$, 都是非负列向量, t 是一个正整数. 那么, 我们得到

(1)如果$x \ge \overline{x} \ge 0, y \ge \overline{y} \ge 0, z \ge \overline{z} \ge 0$, 则$\mathscr{A}x^{p-1}y^qz^r \ge \mathscr{A}\overline{x}^{p-1}\overline{y}^q\overline{z}^r$, $\mathscr{A}x^py^{q-1}z^r \ge \mathscr{A}\overline{x}^p\overline{y}^{q-1}\overline{z}^r$, $\mathscr{A}x^py^qz^{r-1} \ge \mathscr{A}\overline{x}^p\overline{y}^q\overline{z}^{r-1}$

(2)

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(tx)^{p-1}(ty)^q(tz)^r &= t^{M-1}\mathscr{A}x^{p-1}y^qz^r,\\ \mathscr{A}(tx)^{p}(ty)^{q-1}(tz)^r &= t^{M-1}\mathscr{A}x^{p}y^{q-1}z^r,\\ \mathscr{A}(tx)^{p}(ty)^q(tz)^{r-1} &= t^{M-1}\mathscr{A}x^{p}y^qz^{r-1}.\end{aligned}$$

引理 9. 假设一个非负(p, q, r) 阶$(m \times n \times l)$-维长方形张量$\mathscr{A}$ 是不可约的. 那么, 对于任意的强正向量$x > 0, x \in R^m, y > 0, y \in R^n, z > 0, z \in R^l$, 有$\mathscr{A}x^{p-1}y^qz^r$, $\mathscr{A}x^py^{q-1}z^r$, 和$\mathscr{A}x^py^qz^{r-1}$ 是强正向量, i.e.,

$\mathscr{A}x^{p-1}y^qz^r > 0$, $\mathscr{A}x^py^{q-1}z^r > 0$, $\mathscr{A}x^py^qz^{r-1} > 0$.

证明. 显然, $\mathscr{A}x^{p-1}y^qz^r \ge 0$. 假设对某一个i 有$(\mathscr{A}x^{p-1}y^qz^r)_i = 0$. 因为$y > 0, z > 0$, 存在$j_0, k_0$ 和$\delta > 0$ 使得$y \ge \delta f_{j_0}, z \ge \delta g_{k_0}$. 所以我们得到

$$0 = (\mathscr{A}x^{p-1}y^qz^r)_i \ge \delta^{q+r}(\mathscr{A}(x^{p-1}, f_{j_0}^q, g_{k_0}^r))_i \ge 0.$$

即,

$$(\mathscr{A}(x^{p-1}, f_{j_0}^q, g_{k_0}^r))_i = 0. \tag{9}$$

又因为$x > 0$, $\mathscr{A}(\cdot, f_{j_0}^q, g_{k_0}^r)$ 是不可约的, 由文献[16]中的引理2.2,可得$\mathscr{A}(x^{p-1}, f_{j_0}^q, g_{k_0}^r) > 0$, 这与(9)矛盾. 因此, $\mathscr{A}x^{p-1}y^qz^r > 0$.

同理, 我们可以证明$\mathscr{A}x^py^{q-1}z^r > 0$ 和$\mathscr{A}x^py^qz^{r-1} > 0$. □

定理 10. 假设一个非负(p, q, r) 阶$(m \times n \times l)$-维的长方形张量$\mathscr{A}$ 是不可约的. 让$x^{(0)} \in R^m, y^{(0)} \in R^n, z^{(0)} \in R^l$ 是三个任意的强正向量. 且$\xi^{(0)} = \mathscr{A}(x^{(0)})^{p-1}(y^{(0)})^q(z^{(0)})^r$, $\eta^{(0)} =$

$\mathscr{A}(x^{(0)})^p(y^{(0)})^{q-1}(z^{(0)})^r$, $\theta^{(0)}=\mathscr{A}(x^{(0)})^p(y^{(0)})^q(z^{(0)})^{r-1}$. 定义

$$
\begin{aligned}
&x^{(1)}=\frac{(\xi^{(0)})^{[\frac{1}{M-1}]}}{\|(\xi^{(0)},\eta^{(0)},\theta^{(0)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|}, &&y^{(1)}=\frac{(\eta^{(0)})^{[\frac{1}{M-1}]}}{\|(\xi^{(0)},\eta^{(0)},\theta^{(0)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|},\\
&z^{(1)}=\frac{(\theta^{(0)})^{[\frac{1}{M-1}]}}{\|(\xi^{(0)},\eta^{(0)},\theta^{(0)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|},\\
&\xi^{(1)}=\mathscr{A}(x^{(1)})^{p-1}(y^{(1)})^q(z^{(1)})^r, &&\eta^{(1)}=\mathscr{A}(x^{(1)})^p(y^{(1)})^{q-1}(z^{(1)})^r,\\
&\theta^{(1)}=\mathscr{A}(x^{(1)})^p(y^{(1)})^q(z^{(1)})^{r-1},\\
&\vdots\\
&x^{(t+1)}=\frac{(\xi^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|}, &&y^{(t+1)}=\frac{(\eta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|},\\
&z^{(t+1)}=\frac{(\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|},\\
&\xi^{(t+1)}=\mathscr{A}(x^{(t+1)})^{p-1}(y^{(t+1)})^q(z^{(t+1)})^r, &&\eta^{(t+1)}=\mathscr{A}(x^{(t+1)})^p(y^{(t+1)})^{q-1}(z^{(t+1)})^r,\\
&\theta^{(t+1)}=\mathscr{A}(x^{(t+1)})^p(y^{(t+1)})^q(z^{(t+1)})^{r-1}, &&t\geq 1,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

并让

$$
\begin{aligned}
\underline{\lambda}_t&=\min_{x_i^{(t)}>0,y_j^{(t)}>0,z_k^{(t)}>0}\{\frac{\xi_i^{(t)}}{(x_i^{(t)})^{M-1}},\frac{\eta_j^{(t)}}{(y_j^{(t)})^{M-1}},\frac{\theta_k^{(t)}}{(z_k^{(t)})^{M-1}}\},\\
\overline{\lambda}_t&=\max_{x_i^{(t)}>0,y_j^{(t)}>0,z_k^{(t)}>0}\{\frac{\xi_i^{(t)}}{(x_i^{(t)})^{M-1}},\frac{\eta_j^{(t)}}{(y_j^{(t)})^{M-1}},\frac{\theta_k^{(t)}}{(z_k^{(t)})^{M-1}}\},t=1,2,...
\end{aligned}
$$

假设λ_0 是$\mathscr{A}$ 的唯一的正奇异值. 则,

$$\underline{\lambda}_1\leq\underline{\lambda}_2\leq\cdots\leq\lambda_0\leq\cdots\leq\overline{\lambda}_2\leq\overline{\lambda}_1.$$

证明. 由定理6, 对于$t=1,2,...$, 有

$$\underline{\lambda}_t\leq\lambda_0\leq\overline{\lambda}_t.$$

现在我们证明对任意的$t\geq 1$,

$$\underline{\lambda}_t\leq\underline{\lambda}_{t+1}\quad and\quad \overline{\lambda}_{t+1}\leq\overline{\lambda}_t.$$

对于任意的$t=1,2,...$, 由$\underline{\lambda}_t$ 的定义和引理9,可得

$$\xi^{(t)}\geq\underline{\lambda}_t(x^{(t)})^{[M-1]}>0,\quad \eta^{(t)}\geq\underline{\lambda}_t(y^{(t)})^{[M-1]}>0,\quad \theta^{(t)}\geq\underline{\lambda}_t(z^{(t)})^{[M-1]}>0.$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&(\xi^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\geq(\underline{\lambda}_t)^{\frac{1}{M-1}}x^{(t)}>0,\quad (\eta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\geq(\underline{\lambda}_t)^{\frac{1}{M-1}}y^{(t)}>0,\\
&(\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\geq(\underline{\lambda}_t)^{\frac{1}{M-1}}z^{(t)}>0.
\end{aligned}
$$

所以,

$$x^{(t+1)}=\frac{(\xi^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|}\geq\frac{(\underline{\lambda}_t)^{\frac{1}{M-1}}x^{(t)}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|}>0,$$
$$y^{(t+1)}=\frac{(\eta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|}\geq\frac{(\underline{\lambda}_t)^{\frac{1}{M-1}}y^{(t)}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|}>0,$$
$$z^{(t+1)}=\frac{(\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|}\geq\frac{(\underline{\lambda}_t)^{\frac{1}{M-1}}z^{(t)}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|}>0.$$

由引理8, 可得

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(x^{(t+1)})^{p-1}(y^{(t+1)})^{q}(z^{(t+1)})^{r}&\geq\frac{\underline{\lambda}_t\mathscr{A}(x^{(t)})^{p-1}(y^{(t)})^{q}(z^{(t)})^{r}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|^{M-1}}\\&\geq\frac{\underline{\lambda}_t\xi^{(t)}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|^{M-1}}\\&=\underline{\lambda}_t(x^{(t+1)})^{[M-1]}\\\mathscr{A}(x^{(t+1)})^{p}(y^{(t+1)})^{q-1}(z^{(t+1)})^{r}&\geq\frac{\underline{\lambda}_t\mathscr{A}(x^{(t)})^{p}(y^{(t)})^{q-1}(z^{(t)})^{r}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|^{M-1}}\\&\geq\frac{\underline{\lambda}_t\eta^{(t)}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|^{M-1}}\\&=\underline{\lambda}_t(y^{(t+1)})^{[M-1]}\\\mathscr{A}(x^{(t+1)})^{p}(y^{(t+1)})^{q}(z^{(t+1)})^{r-1}&\geq\frac{\underline{\lambda}_t\mathscr{A}(x^{(t)})^{p}(y^{(t)})^{q}(z^{(t)})^{r-1}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|^{M-1}}\\&\geq\frac{\underline{\lambda}_t\theta^{(t)}}{\|(\xi^{(t)},\eta^{(t)},\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|^{M-1}}\\&=\underline{\lambda}_t(z^{(t+1)})^{[M-1]},\end{aligned}$$

即, 对任意的$i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n,\ k=1,2,...,l,$

$$\underline{\lambda}_t\leq\frac{(\mathscr{A}(x^{(t+1)})^{p-1}(y^{(t+1)})^{q}(z^{(t+1)})^{r})_i}{(x_i^{(t+1)})^{M-1}},$$
$$\underline{\lambda}_t\leq\frac{(\mathscr{A}(x^{(t+1)})^{p}(y^{(t+1)})^{q-1}(z^{(t+1)})^{r})_j}{(y_j^{(t+1)})^{M-1}},$$
$$\underline{\lambda}_t\leq\frac{(\mathscr{A}(x^{(t+1)})^{p}(y^{(t+1)})^{q}(z^{(t+1)})^{r-1})_k}{(z_k^{(t+1)})^{M-1}}.$$

因此, 我们得到

$$\underline{\lambda}_t\leq\underline{\lambda}_{t+1}.$$

同理, 我们可以证明

$$\overline{\lambda}_{t+1}\leq\overline{\lambda}_t.$$

□

根据定理10, 我们规定算法如下:

算法1.
步骤0. 选择$x^{(0)} > 0, x^{(0)} \in R^m, y^{(0)} > 0, y^{(0)} \in R^n$ 和$z^{(0)} > 0, z^{(0)} \in R^l$. 让$\xi^{(0)} = \mathscr{A}(x^{(0)})^{p-1}(y^{(0)})^q(z^{(0)})^r$, $\eta^{(0)} = \mathscr{A}(x^{(0)})^p(y^{(0)})^{q-1}(z^{(0)})^r$ 和$\theta^{(0)} = \mathscr{A}(x^{(0)})^p(y^{(0)})^q(z^{(0)})^{r-1}$. 设置$t := 0$.
步骤1. 计算

$$x^{(t+1)} = \frac{(\xi^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}}{\|(\xi^{(t)}, \eta^{(t)}, \theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|}, \qquad y^{(t+1)} = \frac{(\eta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}}{\|(\xi^{(t)}, \eta^{(t)}, \theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|},$$
$$z^{(t+1)} = \frac{(\theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}}{\|(\xi^{(t)}, \eta^{(t)}, \theta^{(t)})^{[\frac{1}{M-1}]}\|},$$
$$\xi^{(t+1)} = \mathscr{A}(x^{(t+1)})^{p-1}(y^{(t+1)})^q(z^{(t+1)})^r, \quad \eta^{(t+1)} = \mathscr{A}(x^{(t+1)})^p(y^{(t+1)})^{q-1}(z^{(t+1)})^r,$$
$$\theta^{(t+1)} = \mathscr{A}(x^{(t+1)})^p(y^{(t+1)})^q(z^{(t+1)})^{r-1},$$

让

$$\underline{\lambda}_t = \min_{x_i^{(t)}>0, y_j^{(t)}>0, z_k^{(t)}>0} \{\frac{\xi_i^{(t)}}{(x_i^{(t)})^{M-1}}, \frac{\eta_j^{(t)}}{(y_j^{(t)})^{M-1}}, \frac{\theta_k^{(t)}}{(z_k^{(t)})^{M-1}}\},$$
$$\overline{\lambda}_t = \max_{x_i^{(t)}>0, y_j^{(t)}>0, z_k^{(t)}>0} \{\frac{\xi_i^{(t)}}{(x_i^{(t)})^{M-1}}, \frac{\eta_j^{(t)}}{(y_j^{(t)})^{M-1}}, \frac{\theta_k^{(t)}}{(z_k^{(t)})^{M-1}}\}.$$

步骤2. 如果$\overline{\lambda}_{t+1} = \underline{\lambda}_{t+1}$, 则停止. 否则, 把$t$ 替换为$t+1$ 并继续步骤1.

由以上算法和定理10, 我们可以得到下面的结果.

定理 11. 假设一个非负(p, q, r)th 阶$(m \times n \times l)$-维长方形张量$\mathscr{A}$ 是不可约的. λ_0 是$\mathscr{A}$ 的唯一的正奇异值. 那么, 算法1 通过有限步得到λ_0 的值, 或者生成两个收敛序列$\{\underline{\lambda}_t\}$ 和$\{\overline{\lambda}_t\}$. 此外, 让$\underline{\lambda} = lim_{t\to+\infty}\underline{\lambda}_t$ 和$\overline{\lambda} = lim_{t\to+\infty}\overline{\lambda}_t$. 那么, $\underline{\lambda}$ 和$\overline{\lambda}$ 分别是λ_0 的一个下界和上界. 如果$\underline{\lambda} = \overline{\lambda}$, 则$\lambda_0 = \underline{\lambda} = \overline{\lambda}$.

参考文献:

[1] Qi L. Eigenvalues of a real supersymmetric tensor. J Symb Comoput, 2005, 40: 1302-1324.

[2] Lim L H. Singular values and eigenvalues of tensors: a variational approach. Proceedings of the IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing[J], 2005, 1: 129-132.

[3] Qi L, Wang Y, Wu E. D-eigenvalues of diffusion kurtosis tensor[J], J Comput Appl Math, 2008, 221: 150-157.

[4] Ng M, Qi L, Zhou G. Finding the largest eigenvalue of a non-negative tensor[J], SIAM J Matrix Anal Appl, 2009, 31: 1090-1099.

[5] Ni Q, Qi L, Wang F. An eigenvalue method for the positive definiteness identification problem[J], IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53: 1096-1107.

[6] Qi L, Wang F, Wang Y. Z-eigenvalue methods for a global polynomial optimization problem[J], Math. Program, 2009, 118: 301－316.

[7] Knowles J K, Sternberg E, On the ellipticity of the equations of non-linear elastostatics for a special material[J], J. Elasticity, 1975, 5: 341－361.

[8] Knowles J K, Sternberg E, On the failure of ellipticity of the equations for finite elastostatic plane strain[J], Arch. Ration. Mech. Anal, 1977, 63: 321－336.

[9] Rosakis P. Ellipticity and deformations with discontinuous deformation gradients in finite elastostatics[J], Arch. Ration. Mech. Anal, 1990, 109: 1－37.

[10] Wang Y, Aron M. A reformulation of the strong ellipticity conditions for unconstrained hyperelastic media[J], J. Elasticity, 1996, 44: 89－96.

[11] Dahl D, Leinass J M, Myrheim J, et al. A tensor product matrix approximation problem in quantum physics[J], Linear Algebra Appl, 2007, 420: 711－725.

[12] Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete[J], Phys. Rev, 1935, 47: 777－780.

[13] Chang K C, Pearson K, Zhang T. On eigenvalue problems of real symmetric tensors[J], J. Math. Anal. Appl, 2009, 350: 416-422.

[14] Lim L H. Multilinear pagerank:measuring higher order connectivity in linked objects[J]. The Internet: Today and Tomorrow, July, 2005.

[15] Drineas P, Lim L H. A multilinear spectral theory of hypergraphs and expander hypergraphs[J], Work in progress, 2005.

[16] Chang K C, Pearson K, Zhang T. Perron-Frobenius theorem for nonnegative tensors[J], Commun. Match. Sci, 2008, 6: 507-520.

[17] Yang Y, Yang Q, Singular values of nonnegative rectangular tensors[J]. Front. Math. China, 2011, 6 (2): 363-378.

A Note on Generalized Rectangular Tensors

Liu Bingjie[1], Bian Hong[1*], Yu Haizheng[2], Ma Li[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University,
Urumqi, Xinjiang 830054, P. R. China

[2]College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University,
Urumqi 830046, P.R.China

Abstract The Perron-Frobenius Theorem is a fundamental result for nonnegative matrices. In particular, the Perron Frobenius Theorem for nonnegative tensors is related to measuring higher order connectivity in linked objects and hypergraphs. In this paper, we define a generalized rectangular tensor which is based on the definition of rectangular tensors, and give some new results on the Perron-Frobenius Theorem for nonnegative generalized rectangular tensor.