

阿波罗网络模型的若干统计指标

苏静, 姚兵*

(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃兰州 730070)

摘要: 针对具有无标度特性的阿波罗网络模型, 为了进一步研究网络遭到蓄意攻击以后的受损程度, 本文详细计算了瓦解度、脆弱度等新的参数. 受度累积分布的启发, 又提出了新的 D -度累积分布以及 dd -度累积分布, 并通过计算度累积分布和边累积分布, 验证彼此 4 类分布等价且均服从指数分布.

关键词: 阿波罗网络; 度累积分布; 瓦解度; 脆弱度.

中图分类号: O157. 5 **文献标志码:** A

1 引言及概念

复杂网络的研究是当今网络研究的重要课题, 人们提出了许多网络模型, 比如 Watts 和 Strogatz (Ref. [1]) 在1998年结合规则网络和随机网络的特点给出了 (WS) 小世界网络模型, Barabási 和 Albert 在1999年提出的无标度网络模型 (BA模型) (Ref. [2]). 可以说激发了人们对复杂网络的各种性质研究的兴趣 (Ref. [3], [4], [5]). 显然, 其中不乏研究者通过大量的实验、数据、模型来探索无标度网络的机制与特性, 研究表明无标度网络的度累积分布服从指数分布. 本文将证明 4 类彼此等价的累积分布, 试图为研究无标度网络提供更多的衡量标准.

由于无标度网络中大部分节点的度数不大, 只有极少数节点的度十分巨大. 网络中这些度值非常大的中枢节点的存在使得无标度网络对意外故障有强大的承受能力, 但面对协同性攻击时, 却显得十分脆弱. 实际上, 现实中的很多网络是极易收到攻击的, 比如万维网、飞机航线网、新陈代谢网、社交网等(Ref. [6], [7], [8], [9], [10]). 一旦网络遭到蓄意攻击, 人们会关心它的瓦解程度和网络的本身脆弱程度, 从而可以针对破坏程度的大小, 找到恰当的修复网络的方法, 还可以对网络中比较重要的节点进行保护, 防止受到外界攻击. 如何度量以上提到的网络现象? 如何用数学方法刻画网络的脆弱、瓦解程度? 这是本文所关心、力图解决的问题.

收稿日期: 2016-03-26 录用日期: 2017-02-23

* 基金项目: 国家自然科学基金 (61163054, 61662066, 61363060)

通信作者: yybb918@163.com

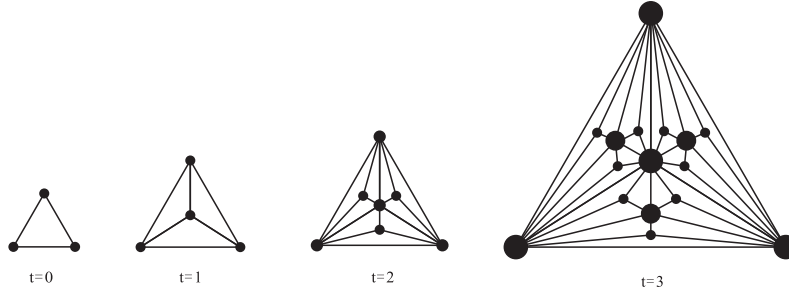


图-1 阿波罗网络的前4个时刻的结构模型.

Figure 1: The construction of the Apollonian networks at the first four steps

2 阿波罗网络模型的构造算法

记 t 时刻的阿波罗网络为 $N(t)$, 初始网络 $N(0)$ 是平面上的一个内三角形, 在此三角形内部加入一个新节点, 并连接这个新节点与该三角形的三个顶点, 即可得到 $N(1)$. 同样地, 在 $N(1)$ 中的三个内三角形中分别加入一个新节点, 与各自所在三角形的三个顶点连边, 构造出 $N(2)$. 以此类推, 从网络 $N(t-1)$ 可得到网络 $N(t)$ (见图1). 此过程由以下算法表述:

初始: $t = 0$, $N(0)$ 有三个顶点与三条边构成一个三角形, 称为活动三角形.

迭代: $t \geq 1$, $N(t)$ 是通过对 $N(t-1)$ 添加顶点和边而得到, 对 $N(t-1)$ 的每个活动三角形中心添加一个新顶点, 并连接新顶点与该活动三角形的三个顶点, 新产生的 3 个三角形又成为下一时刻网络演化过程中的活动三角形.

对任意给定的 t 时刻阿波罗网络 $N(t)$, 用记号 $n_v(t)$ 和 $n_e(t)$ 分别表示它的节点个数和边数目, 记号 $V(t)$ 和 $E(t)$ 分别表示阿波罗网络 $N(t)$ 的节点集合和边集合, 即是 $n_v(t) = |V(t)|$, $n_e(t) = |E(t)|$. 在网络增长过程中, 一个新节点的产生对应产生 3 条新边, 也就是说新产生的节点的度为 3. 由于阿波罗网络增长过程的迭代性质, 可以得到 $N(t)$ 的节点数目和边数目分别如下

$$n_v(t) = n_v(t-1) + 3^{t-1} = \frac{1}{2}(3^t + 5) \quad (t \geq 1) \quad (1)$$

$$n_e(t) = n_e(t-1) + 3^t = \frac{3}{2}(3^t + 1) \quad (t \geq 1) \quad (2)$$

此外, $N(t)$ 的平均度 $\langle k \rangle$ 满足

$$\langle k \rangle = \frac{2n_e(t)}{n_v(t)} = \frac{2[\frac{3}{2}(3^t + 1)]}{\frac{1}{2}(3^t + 5)} = \frac{2 \cdot 3^{t+1} + 6}{3^t + 5}. \quad (3)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 平均度 $\langle k \rangle \rightarrow 6$, 这说明阿波罗网络 $N(t)$ 是一个稀疏网络. $N(t)$ 的构造可以看出, $N(t)$ 具有优先链接性, 即初始网络中的节点的连线数目十分大, 同时也表明 $N(t)$ 具有增长性. 文献 [11] 证明, 阿波罗网络属于无标度模型.

3 阿波罗网络模型的拓扑结构

3.1 度累积分布 (cumulative degree distribution)

累积度分布 $P_{cum}(k)$ 是网络的一个很重要的统计参数, 它的定义是

$$P_{cum}(k) = \frac{1}{n_v(t)} \sum_{k' \geq k} |V(k', t)| \quad (4)$$

这里 $V(k', t)$ 是 $N(t)$ 中度数为 k' 的节点之集, 已知 t 时刻, $N(t)$ 中与 i 节点 关联的边数目称为节点 i 的度, 记为 $k_i(t)$, 具有度数 $k_i(t)$ 的节点的个数记为 $n_{k_i}(t)$, 即 $n_{k'}(t) = |V(k', t)|$. 为叙述简便, 我们将节点 i 称为 i 号点, 即 0 号点为 $N(0)$ 的顶点; 1 号点为 $N(1) \setminus N(0)$ 的点; 2 号点为 $N(2) \setminus N(1)$ 的点, 依次类推. 就初始网络的节点而言, $k_0(t) = k_0(t-1) + 2^{t-1}$ 且 $k_0(0) = 2$. 对 i ($i \geq 1$) 号点, $k_i(t) = 2k_i(t-1)$, 且 $k_i(i) = 3$. 因此, 不难得出阿波罗网络 $N(t)$ 的度数与对应节点个数的度谱: $N(t)$ 中度数为 $k_i(t) = 3, 6, 12, \dots, 3 \cdot 2^{t-1}, 2^t + 1$ 的节点个数 $n_{k_i}(t) = 3^{t-1}, 3^{t-2}, 3^{t-3}, \dots, 1, 3$. 注意到, $N(t)$ 的度谱属于离散型, 在 τ 时刻以后, 进入阿波罗网络 $N(t)$ 的节点度数均小于 k , τ 时刻之前进入的顶点的度都大于 k , 则有

$$\begin{aligned} P_{cum}(k) &= \frac{1}{n_v(t)} \sum_{k' \geq k} |V(k', t)| \\ &= \frac{1}{n_v(t)} \left[3 + \sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{2} (3^i + 5) \right] \\ &= \frac{3 + \frac{1}{2}(3^1 + 5) + \frac{1}{2}(3^2 + 5) + \dots + \frac{1}{2}(3^\tau + 5)}{\frac{1}{2}(3^t + 5)} \\ &= \frac{3^{\tau+1} + 10\tau + 9}{2(3^t + 5)} \propto \frac{3}{2} 3^{\tau-t} \end{aligned} \quad (5)$$

将 $\tau = t - \frac{\ln k - \ln 3}{\ln 2}$ 代入上式, 得 $P_{cum}(k) \propto k^{1-r_c}$, 其中 $r_c = 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 2.586$. 从而证明 $N(t)$ 服从幂律分布.

3.2 边累积分布 (edge cumulative distribution)

当 $0 < \tau < t$, 文献 [10] 中提到了另一种关于累积分布的统计方法, 叫做边累积分布 $P_{ecum}(k) = \frac{1}{n_e(t)} \sum_{i=0}^{\tau} n_e(i)$. 根据阿波罗网络的度谱, 可计算它的边累积分布

$$\begin{aligned}
P_{ecum}(k) &= \frac{1}{n_e(t)} \sum_{i=0}^{\tau} n_e(i) \\
&= \frac{n_e(0) + n_e(1) + \cdots + n_e(\tau - 1) + n_e(\tau)}{n_e(t)} \\
&= \frac{\frac{3}{2}(3^0 + 1) + \frac{3}{2}(3^1 + 1) + \frac{3}{2}(3^2 + 1) + \cdots + \frac{3}{2}(3^{\tau} + 1)}{\frac{3}{2}(3^t + 1)} \\
&= \frac{3^{\tau+1} + 2\tau + 1}{2(3^t + 1)}
\end{aligned} \tag{6}$$

对任给的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned}
|P_{cum}(k) - P_{ecum}(k)| &= \left| \frac{3^{\tau+1} + 10\tau + 9}{2(3^t + 5)} - \frac{3^{\tau+1} + 2\tau + 1}{2(3^t + 1)} \right| \\
&= \frac{|3^t(8\tau + 8) - 12 \cdot 3^{\tau} + 4|}{2(3^t + 5)(3^t + 1)} \\
&< \frac{3^t(8\tau + 8) + 12 \cdot 3^{\tau} + 4}{2(3^t + 5)(3^t + 1)} \\
&< \frac{3^t(8\tau + 24)}{2(3^t + 5)(3^t + 1)} < \frac{16\tau 3^t}{(3^t + 5)(3^t + 1)} < \frac{16t}{3^t} < \frac{16}{t}
\end{aligned} \tag{7}$$

当 t 充分大时, 立得 $\frac{16}{t} < \varepsilon$, 从而证明了 $P_{ecum}(k) \sim P_{cum}(k)$.

3.3 D -度累积分布 (D-cumulative degree distribution)

受度累积分布的启发, 定义一种新的统计指标: D -度累积分布. 对一个固定的整数 $d \geq k$, 有 $P_{cum}^D(k) = \frac{1}{n_v(d,t)} \sum_{i=0}^{\tau} n_v(d, i)$, 其中 $n_v(d, i)$ 是网络 $N(i)$ 中度为 d 的节点的个数, 当 $N(i)$ 中没有度为 d 的节点时, 规定 $n_v(d, i) = 0$. 按照阿波罗网络的度谱, 为了便于计算, 记 $d = 3 \cdot 2^m$ ($0 \leq m < t$), 则度数 d 对应的节点个数为 $n_v(d, t) = 3^{t-(m+1)}$. 可计算出

$$\begin{aligned}
P_{cum}^D(k) &= \frac{1}{n_v(d, t)} \sum_{i=0}^{\tau} n_v(d, i) \\
&= \frac{3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{\tau-(m+1)}}{3^{t-(m+1)}} = \frac{3^{\tau-m} - 1}{2 \cdot 3^{t-m-1}} \propto \frac{1}{2} \cdot 3^{\tau-t}
\end{aligned} \tag{8}$$

当 $t > \frac{11 \cdot 3^m}{\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) 时, 有

$$\begin{aligned}
|P_{cum}(k) - P_{cum}^D(k)| &= \left| \frac{3^{\tau+1} + 10\tau + 9}{2(3^t + 5)} - \frac{3^{\tau-m} - 1}{2 \cdot 3^{t-m-1}} \right| \\
&< \frac{10\tau \cdot 3^t + 3^t + 15 \cdot 3^t + 3 \cdot 3^t + 15 \cdot 3^t}{2 \cdot 3^{t-m} \cdot 3^t} \\
&< \frac{22\tau \cdot 3^m}{3^t} < \frac{11 \cdot 3^m}{t} < \varepsilon
\end{aligned} \tag{9}$$

即 $P_{cum}^D(k) \sim P_{cum}(k)$.

3.4 dd -度累积分布 (d-cumulative degree distribution)

此外, 本文还定义了一种新的统计指标: dd -度累积分布. 对一个固定的整数 $d > k$, 有 $P_{cum}^{dd}(k) = \frac{1}{n_v(d,t)} \sum_{i=0}^{\tau} d \cdot n_v(d,i)$ ($0 < \tau < t$), 其中 $n_v(d,i)$ 是 $N(i)$ 中度为 d 的节点的个数, 当 $N(i)$ 中没有度为 d 的节点时规定 $n_v(d,i) = 0$. 参照阿波罗网络的度谱, 类似于上述记号有 $d = 3 \cdot 2^m$ ($0 \leq m \leq t$), 且度数 d 对应的节点个数为 $n_v(d,i) = 3^{t-(m+1)}$. 可计算出

$$\begin{aligned}
P_{cum}^{dd}(k) &= \frac{1}{n_v(t)} \sum_{i=0}^{\tau} d \cdot n_v(d,i) \\
&= \frac{3 \cdot 2^m}{3^{t-(m+1)}} (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{\tau-(m+1)}) = 2^{m-1} \cdot 3^{\tau-t+2}
\end{aligned} \tag{10}$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned}
|P_{cum}(k) - P_{cum}^{dd}(k)| &= \left| \frac{3^{\tau+1} + 10\tau + 9}{2(3^t + 5)} - 2^{m-1} \cdot 3^{\tau-t+2} \right| \\
&= \left| \frac{3^{\tau+1} + 10\tau + 9}{2(3^t + 5)} - \frac{2^m \cdot 3^{\tau+2}}{2 \cdot 3^t} \right| \\
&< \frac{(10\tau + 9) \cdot 3^t + 5 \cdot 2^m \cdot 3^t}{2 \cdot 3^t(3^t + 5)} < \frac{19 + 5 \cdot 2^m}{t} < \varepsilon
\end{aligned} \tag{11}$$

当 $t > \frac{19+5 \cdot 2^m}{\varepsilon}$ 时, 可以得到 $|P_{cum}(k) - P_{cum}^{dd}(k)| < \varepsilon$. 从而可得 $P_{cum}^{dd}(k) \sim P_{cum}(k)$.

4 阿波罗网络的其他统计指标

网络受到攻击的情形大致可分为两种: 一种是外界蓄意攻击网络中的边, 比如战争中军方破坏敌人的飞机航线、炸毁敌人运送物资的铁路等等. 但是这种破坏不会摧毁网络中的关键节点, 于是, 修复网络相对地容易; 另一种攻击方式是破坏网络中的节点, 一旦网络中节点遭到毁坏, 那么这些节点携带的信息将无法再传输给其他相关节点, 将导致网络整体或局部地瘫痪. 这种破坏方式将导致修复网络的过程变得复杂, 所以研究网络的受损程度更有助于人类控制网络.

我们没有收集到关于网络瘫痪的数学刻画, 也没有见到网络瘫痪修补的困难度研究, 这主要归结于网络的随机性、非确定性等因素. 实际上瘫痪网络的状态是各异的, 一个网络可以被破坏

成10个碎块或100个碎块. 显然, 修补10个碎块比修补100个碎块难度低、花费少、耗时短. 下面给出我们试验后的理论工作, 分为顶点和边2个方面的概念.

4.1 瓦解度和脆弱度

一般地, 从网络 $N(t)$ 的顶点集中删除一个子集导致整个网络瘫痪. 若有子集 $X^* \subset V(N(t))$, 使得对任意的子集 $X \subset V(N(t))$ 总有分支数目 $\omega(N(t) - X^*) \geq \omega(N(t) - X)$ 成立, 记 $cor(t) = \frac{|X^*|}{|V(N(t))|}$ 为网络 $N(t)$ 的瓦解度. 显然, 满足瓦解度 $cor(t)$ 的子集可能有多个. 另外定义 $frr(t) = \frac{\omega(N(t) - X^*)}{|V(N(t))|}$ 为 $N(t)$ 的脆弱度. 网络脆弱度是一个相对分支数目的概念, 即是统计碎块的比率. 不难看到, $cor(t)$ 的值越大, 网络受损程度越厉害; $frr(t)$ 的值越小, 网络稳定性越好, 抵御外界攻击的能力也就越强. 阿波罗网络模型 $N(t)$ 的瓦解度和脆弱度分别如下:

$$cor(t) = \frac{|X^*|}{|V(N(t))|} = \frac{\frac{1}{2}(3^{t-1} + 5)}{\frac{1}{2}(3^t + 5)} \approx \frac{1}{3}, \quad frr(t) = \frac{\omega(N(t) - X^*)}{|V(N(t))|} = \frac{3^{t-1}}{\frac{1}{2}(3^t + 5)} \approx \frac{2}{3}. \quad (12)$$

在阿波罗网络中, 破坏 X^* 中的全部节点, 才能使网络遭破坏后的分支最多, 瓦解度越大.

4.2 边瓦解度和边脆弱度

类似于顶点的瓦解度和脆弱度的叙述, 阿波罗网络模型也有边瓦解度和边脆弱度. 对任意边子集 $Y \subset E(N(t))$, 若存在边子集 $Y^* \subset E(N(t))$, 使得总有 $\omega(E(t) - Y^*) \geq \omega(E(t) - Y)$ 成立, 记 $cor_E(t) = \frac{|Y^*|}{|E(N(t))|}$ 为网络 $N(t)$ 的边瓦解度, $frr_E(t) = \frac{\omega(N(t) - Y^*)}{|E(N(t))|}$ 为 $N(t)$ 的边脆弱度 (Ref. [10]). 阿波罗网络的边瓦解度和边脆弱度分别为:

$$cor_E(t) = \frac{|Y^*|}{|E(N(t))|} = \frac{\frac{3}{2}(3^t + 1)}{\frac{3}{2}(3^t + 1)} \approx 1, \quad frr_E(t) = \frac{\omega(N(t) - Y^*)}{|E(N(t))|} = \frac{\frac{1}{2}(3^t + 5)}{\frac{3}{2}(3^t + 1)} \approx \frac{1}{3}. \quad (13)$$

不难看到, 在阿波罗网络中, 只有破坏网络中的所有边才能使得整个网络的瓦解度达到最大.

4.3 邻点度平均和吸引数

本文认为, 一个顶点 u 的邻点与外界的关联多少显示这个顶点 u 的重要性. 例如: 在几万人的大学校园里, 大学校长不可能与众多的人有直接的联系, 他是通过几个二、三级领导与全校教职工和学生联系, 所以这几个二、三级领导所关联的人数就很多. 因此, 本文提出考察邻点度平均. 文献 [10] 中定义一个节点 x 的邻点度平均为 t 时刻 x 的邻点的度之和与 x 的度的比值, 记为 $d_{ave}(x)$, 即有 $d_{ave}(x) = \frac{1}{k(x,t)} \sum_{y \in nei(x)} k(y,t)$, 其中 $k(x,t)$ 表示 $N(t)$ 中节点 x 的度, $nei(x)$ 是指 $N(t)$ 中节点 x 的所有邻点构成的集合. 节点 x 的吸引数定义为

$$att(x) = \frac{k(x,t) - 1}{\sum_{y \in nei(x)} k(y,t)}. \quad (14)$$

对于阿波罗网络的不同顶点进行计算如下: 对初始 $t = 0$ 时的顶点 v_0 , 有

$$\begin{aligned} d_{ave}(v_0) &= \frac{\sum_{y \in nei(v_0)} k(y, t)}{k(v_0, t)} \\ &= \frac{2(2^t + 1) + 3 \cdot 2^{t-1} + 2 \cdot 3 \cdot 2^{t-2} + \dots + 2^{t-1} \cdot 3 \cdot 2^{t-t}}{2^t + 1} \end{aligned} \quad (15)$$

$$att(v_0) = \frac{k(v_0, t) - 1}{\sum_{y \in nei(v_0)} k(y, t)} = \frac{2^t}{2(2^t + 1) + 3t \cdot 2^{t-1}} \quad (16)$$

对 $N(i)$ 中标号为 i 的某个顶点 v_i ($i \geq 1$), 则有

$$\begin{aligned} d_{ave}(v_i) &= \frac{1}{k(v_i, t)} \sum_{y \in nei(v_i)} k(y, t) \\ &= \frac{3 \cdot (3 \cdot 2^{t-(i+1)}) + 6(3 \cdot 2^{t-(i+2)}) + \dots + 3 \cdot 2^{t-(i+1)}(3 \cdot 2^{t-t}) + S_{u,v,i-1}}{3 \cdot 2^{t-i}} \\ &= \frac{9(t-i) \cdot 2^{t-i-1} + S_{u,v,i-1}}{3 \cdot 2^{t-i}} \end{aligned} \quad (17)$$

以及

$$att(v_i) = \frac{k(v_i, t) - 1}{\sum_{y \in nei(v_i)} k(y, t)} = \frac{3 \cdot 2^{t-i} - 1}{9(t-i) \cdot 2^{t-i-1} + S_{u,v,i-1}} \quad (18)$$

其中 $S_{u,v,i-1}$ ($u, v, i-1$ 为节点标号) 是指 i 号点的邻点中在 i 号点之前进入网络的三个节点的度之和.

$$S_{u,v,i-1} = \begin{cases} 2^{t+1}(3 \cdot 2^{-i} + 1) + 2, & u = 0, v = 0; \\ 2^t[3(2^{-v} + 2^{1-i}) + 1] + 1, & u = 0, 1 \leq v \leq i - 2; \\ 3 \cdot 2^t(2^{-u} + 2^{-v} + 2^{1-i}), & 1 \leq u, v \leq i - 2, u \neq v. \end{cases} \quad (19)$$

5 总结

以文献[11]中的阿波罗网络模型为例, 计算了该网络的度累积分布、边累积分布以及 D -度累积分布和 dd -度累积分布, 并考查了上述几类累积分布的相互关系, 最终得到 $P_{cum}(k) \sim P_{ecum}(k) \sim P_{cum}^D(k)$. 表明无标度的阿波罗网络的以上三类累积分布相互等价, 无标度网络是否均具有此类性质值得进一步研究. 本文提出新的累积分布: D -度累积分布, dd -度累积分布. 目的是为研究无标度网络的拓扑结构提供更多的衡量标准. 此外, 本文针对受到攻击的阿波罗网络, 定义设计了网络的瓦解度和脆弱度、边瓦解度和边脆弱度、邻点度平均和吸引数这 6 个新指标来刻画网络的坚韧性和脆弱度. 当然, 还需要对新的随机统计指标在其他的网络模型中进一步地测试, 提高刻画的精确度. 人们可以利用对这些新指标的分析, 更好地研究网络的本质特性, 修复遭到蓄意攻击的网络. 同时, 也会根据不同网络的性质, 采取相应的措施保护更多的, 更重要的网络不受攻击.

参考文献

- [1] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of small-world networks [J]. Nature, 1998,393(6684): 440-442.
- [2] BARABASI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks [J]. Science, 1999, 286: 509-512.
- [3] NEWMAN M E J, WATTS D J. Renormalization group analysis of the small-world network model [J], Phys. Lett. A, 1999, 263: 341-346.
- [4] AMARAL L A N, SCALA A, BARTHELEMY M, et al. Classes of Small-World Networks [J], Proc. National Academy of Sciences USA, 2000, 97: 11149-11152.
- [5] COMELLAS F, SAMPELS M. Statistical Mechanics and its Applications [J]. Physica A, 2002, 309: 231-235.
- [6] JEONG H, TOMBOR B, ALBERT R, et al. The large-scale organization of metabolic networks [J], Nature, 2000, 407: 651-655.
- [7] ALBERT R, JEONG H, BARABASI A L. Diameter of the world wide web [J], Nature, 1999, 401: 130-131.
- [8] 张婉佳, 刘霞, 姚兵. 一类增长网络模型的生成树 [J]. 厦门大学学报:自然科学版, 2015, 54(4): 497-501.
- [9] 李振汉, 唐余亮, 雷鹰. 基于ZigBee的无线传感器网络的自愈功能 [J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 2012, 51(5):834-838.
- [10] YAO B, WANG H Y, YAO M. On the collapse of graphs related to scale-free networks [C]. Proceeding of 2013 Third International Conference on Information Science and Technology. Publisher: IEEE USA, 16-21. DOI:10.1109/ICIST.2013.6747651.
- [11] ZHANG Z Z, WU B, COMELLAS F. The number of spanning trees in Apollonian networks [J]. Discrete Applied Mathematics 2014, 169: 206-213.

Some Statistical Indexes of Apollonian Network Models

SU Jing, YAO Bing*

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract Aimed at the Apollonian network model with scale-free properties, we propose some new parameters for this model in order to further discuss the damage rank of attacked networks, such as collapse-rank, fragile-rank and so on. Inspired by cumulative degree distribution, we also propose a new D -degree cumulative distribution and compute it with other two cumulative degree distribution and edge cumulative distribution for verifying the equivalency of these distributions, as well as show that three all are exponential.

keywords: Apollonian networks; degree cumulative distribution; collapse-rank; fragile-rank.